Microeconomia per la Finanza - Esercitazione 3
Bayesian updating

Paolo Crosetto
pcrosetto@luiss.it

6 Maggio 2010

1. Che faremo?

Dove trovare i materiali:

http://docenti.luiss.it/crosetto/

1. Ripasso di probabilità
2. Regola di Bayes
3. Esempi
4. Bayesian updating
5. Esempi

Probabilità condizionata

Dati due eventi A e B, qual è la probabilità di osservare A se si è osservato B?

- La risposta è la *probabilità condizionata*, $Pr(A|B)$
- Se i due eventi sono indipendenti, la probabilità condizionata è solo $Pr(A)$.
- Se non sono indipendenti, aver osservato B ci da informazioni in più.
- La probabilità condizionata si calcola con

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

Esempio

Indipendenti. Lanciamo due monete. Sapendo che il primo lancio ha dato risultato *Testa*, la probabilità che il secondo dia *Testa* è $Pr(T) = 0.5$; le informazioni sulla prima moneta non ci dicono nulla su cosa succederà alla seconda.

Correlati. Lanciamo due monete. La probabilità di osservare $(Testa, Testa)$ è a priori di 0.25. La stessa probabilità, se sappiamo che il primo lancio ha dato *Testa*, è di 0.5; se invece il primo lancio ha dato *croce*, la probabilità è zero.

Concetti di base

Probabilità congiunta

Dalla formula della probabilità condizionata possiamo ricavare la formula di probabilità congiunta:

$$Pr(A \cap B) = Pr(A|B) \cdot Pr(B)$$

Se gli eventi sono indipendenti, la formula diventa

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$$

Eventi esclusivi

Ipotizziamo che il verificarsi dell'evento A renda impossibile l'evento B (esempio: se adesso è nuvoloso, non possiamo osservare il sole).
Prendiamo ora l'evento C, 'Essere in ritardo a lezione'. In questo caso vale:

$$Pr(C) = Pr(C \cap A) + Pr(C \cap B)$$

Inoltre, applicando le formule di cui sopra,

$$Pr(C) = Pr(C|A) \cdot Pr(A) + Pr(C|B) \cdot Pr(B)$$

Regola di Bayes

La regola di Bayes ci permette di aggiornare la probabilità di un evento E quando entriamo in possesso di informazioni I aggiuntive sull'evento.

- Innanzitutto, si possono ricevere informazioni sia che l'evento sia avvenuto, sia che non si avvenuto: le informazioni possono essere spurie.

$$Pr(I) = Pr(I|E) \cdot Pr(E) + Pr(I|\neg E) \cdot Pr(\neg E)$$

- Inoltre, secondo la formula della probabilità congiunta, la probabilità di osservare insieme l'evento e le informazioni è

$$Pr(E \cap I) = Pr(E|I) \cdot Pr(I) = Pr(I|E) \cdot Pr(E)$$

- Quest'ultimo passaggio implica che la probabilità che l'evento sia avvenuto, se osserviamo l'informazione, è

$$Pr(E|I) = \frac{Pr(E) \cdot Pr(I|E)}{Pr(I)}$$

- Infine, la probabilità di osservare l'informazione può essere scomposta nelle sue componenti di informaizone veritiera e spuria, risultando in

$$Pr(E|I) = \frac{Pr(E) \cdot Pr(I|E)}{Pr(I|E) \cdot Pr(E) + Pr(I|\neg E) \cdot Pr(\neg E)}$$

Regola di Bayes, schema

probabilità di ottenere l'informazione dato l'evento

prior

$$Pr(E|I) = Pr(E) \cdot \frac{Pr(I|E)}{Pr(I|E) \cdot Pr(E) + Pr(I|\neg E) \cdot Pr(\neg E)}$$

posterior

probabilità totale di ottenere l'informazione

Bayes, esercizio 1

Sul mercato di Londra operano 60 trader. A causa delle notizie che arrivano dalla Grecia, la probabilità che i trader siano presi dal panico e vendano subito i bond greci che detengono è 0.5. Di questi trader, 12 sono tedeschi. I tedeschi temono più degli altri la crisi greca in quanto hanno timori per la stabilità dell'Euro; la probabilità che un trader tedesco venda subito è 0.8.
Osserviamo una vendita: con che probabilità a vendere è stato un trader tedesco? Con che probabilità è stato un trader di altra nazionalità?

Bayes, esercizio 1, soluzione

	$Pr(\textbf{nazione})$	$Pr(\textbf{vende}\vert\textbf{nazione})$
Tedesco	0.2	0.8
Altro	0.8	0.5

Applicando la regola di Bayes, abbiamo:

$$Pr(T|\text{vende}) = Pr(T) \cdot \frac{Pr(\text{vende}|T)}{Pr(\text{vende}|T) \cdot Pr(T) + Pr(\text{vende}|\neg T) \cdot Pr(\neg T)}$$

Il risultato in questo caso è

$$Pr(T|\text{vende}) = 0.2 \cdot \frac{0.8}{0.2 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.5} = \frac{2}{7} = 28.57\%$$

Analogamente, la probabilità che la vendita sia stata effettuata da un non tedesco:

$$Pr(\neg T|\text{vende}) = 0.8 \cdot \frac{0.5}{0.2 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.5} = \frac{5}{7} = 71.43\%$$

Bayes, esercizio 2

Anna detiene un portafoglio di 100 azioni; il 50% delle azioni appartiene alla compagnia A, e il restante 50% è diviso equamente tra le azioni delle compagnie B e C. La probabilità che le azioni perdano valore è del 5% per le azioni A, del 2% per le azioni B, e dell'uno per cento per le azioni C. Calcolare qual è la probabilità che, se osserviamo una perdita, questa sia dovuta alla perdita di valore delle azioni di C. E con quale probabilità è dovuta a una perdita di valore delle azioni di A?

Bayes, esercizio 2, soluzione

	$Pr(\textbf{azione})$	$Pr(\textbf{perdita}\mid\textbf{azione})$
A	0.5	0.05
B	0.25	0.02
C	0.25	0.01

Applicando la regola di Bayes, abbiamo:

$$Pr(C|\text{perdita}) = Pr(C) \cdot \frac{Pr(\text{perdita}|C)}{Pr(\text{perdita}|A) \cdot Pr(A) + Pr(\text{perdita}|B) \cdot Pr(B) + Pr(\text{perdita}|C) \cdot Pr(C)}$$

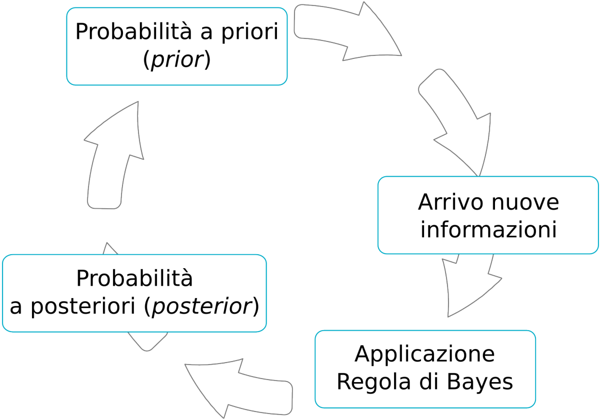
Il risultato in questo caso è

$$Pr(C|\text{perdita}) = 0.25 \cdot \frac{0.01}{0.25 \cdot 0.01 + 0.25 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.05} = \frac{1}{13} = 7.69\%$$

Analogamente, la probabilità che la perdita sia dovuta ad A è:

$$Pr(A|\text{perdita}) = 0.5 \cdot \frac{0.05}{0.25 \cdot 0.01 + 0.25 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.05} = \frac{10}{13} = 76.92\%$$

Bayesian updating



- Se le nuove informazioni sono $I.I.D.$, la *posterior* converge al valore vero;
- E questo avviene esponenzialmente nel tempo.

Bayesian updating, esercizio

Un banditore di mercato deve decidere come prezzare un'azione di cui ignora il valore vero, pur sapendo che l'azione ha solo due valori, Basso (B) e Alto (A), e il valore è B con probabilità $Pr(B) = \delta$.
Il banditore può però inferire il valore dell'azione dal fatto che osserva i trader comprare o vendere l'azione. Alcuni trader sono informati, cioè conoscono il valore vero dell'azione, mentre altri non sono informati. Supponendo che:

1. I trader informati vendono con probabilità 1 se l'azione ha valore B, e comprano con probabilità 1 se l'azione è A;
2. I trader non informati comprano o vendono con probabilità 0.5;
3. I trader si dividono a metà tra informati e non informati
4. La *prior* del banditore è $Pr(B) = \delta = 0.5$.

Calcolate:

1. la δ *posterior* che il banditore formula dopo aver osservato una vendita.
2. la δ *posterior* dopo aver osservato un acquisto.
3. la δ *posterior* dopo aver osservato due vendite di fila.

Bayesian updating, soluzione I

- Denotiamo una transazione osservata come T; se è una vendita, V, se è un acquisto, C.
- Quello che andiamo cercando è la probabilità che il valore sia basso dopo aver osservato una o più transazioni, $\delta = Pr(B|T)$.
- Per rispondere possiamo usare in generale la regola di Bayes, per cui

$$Pr(B|T) = Pr(B) \cdot \frac{Pr(T|B)}{Pr(T|B) \cdot Pr(B) + Pr(T|A) \cdot Pr(A)}$$

- e poi applicarla ai singoli casi.

Ci mancano però alcune informazioni:

- $Pr(T|A)$, per vendita (V) e acquisto (C)
- $Pr(T|B)$, per vendita (V) e acquisto (C)

Bayesian updating, soluzione II

$Pr(T|A)$

Se il valore dell'azione è alto, i trader informati comprano di sicuro, e i non informati comprano con probabilità 0.5. Quindi avremo un acquisto con la seguente probabilità

$$Pr(C|A) = Pr(\text{inf}) \cdot 1 + Pr(\text{non-inf}) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$$

e, contestualmente, una vendita con la seguente probabilità

$$Pr(V|A) = Pr(\text{inf}) \cdot 0 + Pr(\text{non-inf}) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

$Pr(T|B)$

Se il valore dell'azione è basso, i trader informati vendono di sicuro, e i non informati vendono con probabilità 0.5. Quindi avremo un acquisto con la seguente probabilità

$$Pr(C|B) = Pr(\text{inf}) \cdot 0 + Pr(\text{non-inf}) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

e, contestualmente, una vendita con la seguente probabilità

$$Pr(V|B) = Pr(\text{inf}) \cdot 1 + Pr(\text{non-inf}) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$$

a. posterior dopo una vendita $Pr(B|V)$

Secondo la regola di Bayes,

$$Pr(B|V) = Pr(B) \cdot \frac{Pr(V|B)}{Pr(V|B) \cdot Pr(B) + Pr(V|A) \cdot Pr(A)}$$

Dalle consideraizoni precedenti:

$$Pr(B) = 0.5, Pr(V|B) = 0.75, Pr(A) = 0.5, Pr(V|A) = 0.25$$

Sostituendo, otteniamo

$$Pr(B|V) = 0.5 \cdot \frac{0.75}{0.5 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.25} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Che significa che il banditore, dopo aver osservato una vendita, assegna probaiblità maggiore (0.75 invece di 0.5) al fatto che il vero valore dell'azione sia Basso.

b. posterior dopo un acquisto $Pr(B|C)$

Secondo la regola di Bayes,

$$Pr(B|C) = Pr(B) \cdot \frac{Pr(C|B)}{Pr(C|B) \cdot Pr(B) + Pr(C|A) \cdot Pr(A)}$$

Dalle consideraizoni precedenti:

$$Pr(B) = 0.5, Pr(C|B) = 0.25, Pr(A) = 0.5, Pr(C|A) = 0.75$$

Sostituendo, otteniamo

$$Pr(B|C) = 0.5 \cdot \frac{0.25}{0.5 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.75} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Che significa che il banditore, dopo aver osservato un acquisto, assegna probaiblità minore (0.25 invece di 0.5) al fatto che il vero valore dell'azione sia Basso.

c. posterior dopo due vendite $Pr(B|V, V)$

In questo caso possiamo avvalerci dell'iterazione dell'updating bayesiano: la posterior della prima vendita è inserita come prior, e si fa un secondo updating. La risultante regola di Bayes sarà:

$$Pr(B|V, V) = Pr(B|V) \cdot \frac{Pr(V|B)}{Pr(V|B) \cdot Pr(B|V) + Pr(V|A) \cdot Pr(A|V)}$$

Dalle consideraizoni precedenti:

$$Pr(B|V) = 0.75, Pr(V|B) = 0.75, Pr(A|V) = 0.25, Pr(V|A) = 0.25$$

Sostituendo, otteniamo

$$Pr(B|V, V) = 0.75 \cdot \frac{0.75}{0.75 \cdot 0.75 + 0.25 \cdot 0.25} = \frac{9}{10} = 0.9$$

Ciò significa che se il banditore osserva due vendite di seguito, crederà che l'azione abbia un vero valore Basso con il 90% di probabilità.